

MATHEMATIQUES
(Voie technologique)

DURÉE : 4 HEURES
Coefficient 5

(Jointes à l'énoncé : une feuille de papier millimétrée, une table de la loi de Poisson (valeurs cumulées, avec $\lambda = 10$), une table de la loi normale centrée réduite)

EXERCICE I (5 points)

Le tableau suivant donne le montant, en milliards de francs, des importations de la France en biens de consommation courante de 1982 à 1989 :

Année	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
montant m_i des importations	93,5	102,7	116,6	128,4	139,2	153,3	170,2	193,6

(source : TEF 90 publication INSEE)

On pose $y_i = \log m_i$ où log désigne le logarithme décimal.

1° Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre y et x.

Pour ce faire, on citera les formules utilisées et on dressera le tableau des calculs nécessaires ; les y_i seront arrondis à 10^{-4} près au plus proche ; les autres nombres du tableau seront calculés à partir de ces valeurs arrondies et seront arrondis à 10^{-4} près au plus proche. Le coefficient de corrélation linéaire trouvé sera arrondi à 10^{-3} près au plus proche.

2° Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.

Les coefficients obtenus seront arrondis à 10^{-3} près au plus proche.

3° En déduire une relation entre m et x de la forme :

$$m = k\,\alpha^x$$

k sera arrondi à l'entier le plus proche et α sera arrondi à 10^{-3} près au plus proche.

4° Donner une estimation du montant des importations de la France en biens de consommation courante en 1990.

EXERCICE II (10 points)

Partie A : On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1° Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M.

2° A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.

3° Justifier que la matrice $P^{-1}\,M\,P$ est une matrice diagonale D à préciser.

4° Calculer M^n pour tout entier naturel n non nul.

TOURNEZ la page S.V.P.

5° On pose $N = \frac{1}{10} M$. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$N^n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2-2\times 0{,}1^n & 2-2\times 0{,}1^n & 2+7\times 0{,}1^n \\ 5+4\times 0{,}1^n & 5+4\times 0{,}1^n & 5-14\times 0{,}1^n \\ 2-2\times 0{,}1^n & 2-2\times 0{,}1^n & 2+7\times 0{,}1^n \end{pmatrix}$$

Partie B : Une enquête a été réalisée auprès des téléspectateurs qui regardent le journal télévisé de 20 h. sur l'une des trois chaînes de télévision A, B, C.

1° Les premiers résultats ont permis d'établir que les probabilités a, b, c qu'un téléspectateur regarde la chaîne A, la chaîne B, la chaîne C sont respectivement :

$a = 0{,}5$, $b = 0{,}4$, $c = 0{,}1$

a) On interroge dix téléspectateurs (foyers différents).

Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, que :

1- six de ces personnes exactement regardent la chaîne A ?

2- au moins une personne regarde la chaîne C ?

b) On interroge cent personnes (foyers différents).

1- Préciser la variable aléatoire X indiquant le nombre de téléspectateurs qui regardent la chaîne C.

On approche X par la loi de Poisson de paramètre 10. A l'aide de cette approximation, et avec la précision permise par les tables, calculer la probabilité de l'événement $\{10 < X \leq 20\}$.

2- Préciser la variable aléatoire Y indiquant le nombre de téléspectateurs qui regardent la chaîne B.

On approche Y par la loi normale de paramètres $m = 40$ et $\sigma = 4{,}9$. A l'aide de cette approximation et avec la précision permise par les tables, calculer la probabilité des trois événements suivants :

$\{Y \leq 45\}$; $\{Y \leq 34\}$; $\{35 \leq Y \leq 45\}$.

2° Chaque jour, certains téléspectateurs se déclarent insatisfaits du traitement de l'information sur la chaîne de leur choix et manifestent l'intention de changer de chaîne le jour suivant.

On remarque que :

— Si un téléspectateur regarde un jour la chaîne A, la probabilité qu'il regarde le jour suivant :

— la chaîne A est 0,2 ;
— la chaîne B est 0,6 ;
— la chaîne C est 0,2 .

— Si un téléspectateur regarde un jour la chaîne B, la probabilité qu'il regarde le jour suivant :

— la chaîne A est 0,2 ;
— la chaîne B est 0,6 ;
— la chaîne C est 0,2 .

— Si un téléspectateur regarde un jour la chaîne C, la probabilité qu'il regarde le jour suivant :

— la chaîne A est 0,3 ;
— la chaîne B est 0,4 ;
— la chaîne C est 0,3 .

On note a_n , b_n , c_n les probabilités qu'un téléspectateur regarde la chaîne A, la chaîne B, la chaîne C, le jour n et on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec } X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

A SUIVRE

a) Prouver que pour tout entier naturel n

$$X_{n+1} = N X_n$$

où N est la matrice définie dans le 5° de la partie A.

Justifier alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad X_n = N^n X_0$$

b) Calculer a_n , b_n , c_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et préciser les limites respectives des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE III (5 points)

1° On considère les fonctions f , g et h suivantes :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 6e^{-x} \quad ; \quad g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto e^x + 1 \quad ; \quad h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln 6 - \ln(e^x + 1)$$

a) Dresser les tableaux de variation respectifs de f et g .

b) Tracer, sur un même graphique, les courbes représentatives C_f et C_g de f et g dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : 10 cm sur Ox , 3 cm sur Oy).

Un point G_k étant placé sur C_g , la parallèle à Ox issue de G_k coupe C_f en F_{k+1} ; la parallèle à Oy issue de F_{k+1} coupe C_g en G_{k+1} . Placer, sur la figure précédente, F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 sachant que G_0 est le point de C_g d'abscisse 1.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = g(x)$.

d) Etudier les variations de h et h' et justifier que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \quad |h'(x)| \leq 0{,}82$$

2° Le prix d'un bien de consommation durant la période n est noté p_n . On pose $p_0 = 1$

On suppose que, pour tout entier naturel n , durant la période $(n+1)$,

— la demande d_{n+1} de ce bien est égale à $f(p_{n+1})$;

— l'offre s_{n+1} de ce même bien est égale à $g(p_n)$.

Sachant que, pour chaque période, l'offre est égale à la demande,

a) Préciser l'abscisse des points F_1 , F_2 , F_3 , F_4 et F_5 en fonction de termes de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = h(p_n)$;

c) Montrer, par récurrence sur n , que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq p_n \leq \frac{3}{2}$;

d) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |p_{n+1} - \ln 2| \leq 0{,}82\,|p_n - \ln 2|$;

en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |p_n - \ln 2| \leq 0{,}82^n ,$$

et prouver que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite à préciser.

TOURNEZ la page S.V.P.

LOI DE POISSON

Table de valeurs cumulées

Cette table indique, pour certaines valeurs du paramètre λ, la probabilité de l'événement $[X \leqslant k]$.

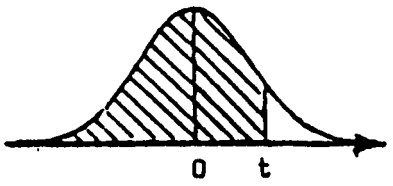
k \ λ	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5
0	0,0002	0,0001	0,0001										
1	0,0019	0,0012	0,0008	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001				
2	0,0093	0,0062	0,0042	0,0028	0,0018	0,0012	0,0008	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
3	0,0301	0,0212	0,0149	0,0103	0,0071	0,0049	0,0034	0,0023	0,0016	0,0011	0,0007	0,0005	0,0003
4	0,0744	0,0550	0,0403	0,0293	0,0211	0,0151	0,0107	0,0076	0,0053	0,0037	0,0026	0,0018	0,0012
5	0,1496	0,1157	0,0885	0,0671	0,0504	0,0375	0,0277	0,0203	0,0148	0,0107	0,0077	0,0055	0,0039
6	0,2562	0,2068	0,1649	0,1301	0,1016	0,0786	0,0603	0,0458	0,0346	0,0259	0,0193	0,0142	0,0105
7	0,3856	0,3239	0,2687	0,2202	0,1785	0,1432	0,1137	0,0895	0,0698	0,0540	0,0415	0,0316	0,0239
8	0,5231	0,4557	0,3918	0,3328	0,2794	0,2320	0,1906	0,1550	0,1249	0,0998	0,0790	0,0621	0,0484
9	0,6530	0,5874	0,5218	0,4579	0,3971	0,3405	0,2888	0,2424	0,2014	0,1658	0,1353	0,1094	0,0878
10	0,7634	0,7060	0,6453	0,5830	0,5207	0,4599	0,4017	0,3472	0,2971	0,2517	0,2112	0,1757	0,1449
11	0,8487	0,8030	0,7520	0,6968	0,6387	0,5793	0,5198	0,4616	0,4058	0,3532	0,3045	0,2600	0,2201
12	0,9091	08758	0,8364	0,7916	0,7420	0,6887	0,6329	0,5760	0,5190	0,4631	0,4093	0,3585	0,3111
13	0,9486	0,9261	0,8981	0,8645	0,8253	0,7813	0,7330	0,6815	0,6278	0,5730	0,5182	0,4644	0,4125
14	0,9726	0,9585	0,9400	0,9165	0,8879	0,8540	0,8153	0,7720	0,7250	0,6751	0,6233	0,5704	0,5176
15	0,9862	0,9780	0,9665	0,9513	0,9317	0,9074	0,8783	0,8444	0,8060	0,7636	0,7178	0,6694	0,6192
16	0,9934	0,9889	0,9823	0,9730	0,9604	0,9441	0,9236	0,8987	0,8693	0,8355	0,7975	0,7559	0,7112
17	0,9970	0,9947	0,9911	0,9857	0,9781	0,9687	0,9542	0,9370	0,9158	0,8905	0,8609	0,8272	0,7897
18	0,9987	0,9976	0,9957	0,9928	0,9885	0,9823	0,9738	0,9626	0,9481	0,9303	0,9084	0,8826	0,8530
19	0,9995	0,9989	0,9980	0,9965	0,9942	0,9907	0,9857	0,9787	0,9694	0,9573	0,9421	0,9235	0,9012
20	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984	0,9972	0,9953	0,9925	0,9884	0,9827	0,9750	0,9649	0,9521	0,9362
21	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9987	0,9977	0,9962	0,9939	0,9906	0,9859	0,9796	0,9712	0,9604
22	1	0,9999	0,9999	0,9997	0,9994	0,9990	0,9982	0,9970	0,9951	0,9924	0,9885	0,9833	0,9763
23		1	0,9999	0,9999	0,9998	0,9995	0,9992	0,9985	0,9975	0,9960	0,9938	0,9907	0,9863
24			1	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9988	0,9980	0,9968	0,9950	0,9924
25					1	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9990	0,9984	0,9974	0,9959
26						1							
27							0,9999	0,9999	0,9997	0,9995	0,9992	0,9987	0,9979
28							1	0,9999	0,9999	0,9998	0,9996	0,9994	0,9989
29								1	1	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995
30										1	0,9999	0,9999	0,9998
31											1	0,9999	0,9999
												1	1

A SUIVRE

LOI NORMALE $\mathcal{N}(0; 1)$

Cette table indique, pour certaines valeurs de t, l'aire de la surface hachurée c'est-à-dire la valeur de :

$$F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to [0,5; 1] \\ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{array} \right.$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7024	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0,7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3,0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3,1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3,2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3,3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3,4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3,5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3,6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

FIN